Lycée Kheniss	Devoir de contrôle N°1	Prof : *********
A.S 2007-2008	Mathématiques durée 2h	4 éme SC exp1+2 Le 03/11/2007

EXERCICE N°1(5pts)

Dans le plan complexe on considère le point M d'affixe z, $z \neq -2i$ et on pose $Z' = \dfrac{z-2+i}{z+2i}$

1) Si z = x + i y, (x, y)$\in IR^2$; donner la forme algébrique de Z' en fonction de x et y

2) Déterminer l'ensemble E des points M tel que $Z' \in IR$

3) Déterminer l'ensemble **F** des points M tel que $Z' \in iIR$

4) Déterminer l'ensemble **G** des points M tel que $|Z'| = 1$

5) Soit A le point d'affixe $z_A = -2i$.

Montrer que si M décrit le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$ le point M' (Z') varie sur un cercle que l'on précisera. (Vérifier que z s'écrit z= -2i + $\sqrt{5}\, e^{i\alpha}$, $\alpha \in [0,2\pi]$)

EXERCICE N°2 (5pts)

On considère dans ¢ l'équation (E) **:** $Z^2 - 2Z + 1 - e^{2i\theta} = 0$

1) Résoudre l'équation (E) dans ¢.

2) Soit $\theta \in]0,\pi[$ on donne $Z_1 = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ et $Z_2 = 1-\cos\theta - i\sin\theta$

Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme trigonométrique.

3) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct les points M_1 et M_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2

a) Calculer Z_1 / Z_2 et en déduire que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

b) Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

c) Montrer que si θ décrit $]0,\pi[$, le point M_1 varie sur un cercle (C) que l'on précisera. (Tracer (C) et préciser cet ensemble).

EXERCICE N°3 (6pts)

1) a) Montrer que l'équation (E) : $X^3 + X^2 + X - 2 = 0$ admet une solution $\alpha \in]0, 1[$

b) Montrer que la fonction f : $X \mapsto X^3 + X^2 + X - 2$ est strictement croissante sur l'intervalle [0, 1].

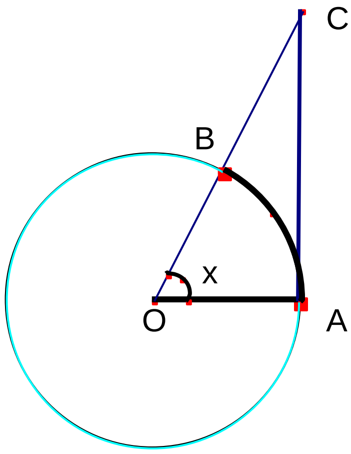
c) En déduire que l'équation (E) admet une solution unique dans]0, 1[

d) Trouver un encadrement d'amplitude 0,25 de cette solution.

2) Dans la figure, ζ est un cercle de rayon 1, X est un réel de l'intervalle $[0, \pi/2[$

a) Exprimer en fonction de X la longueur de chacun des trajets OAB (en trait fort sur la figure) et AC.

b) Montrer qu'il existe une unique valeur X_0 de $]0, \pi/2[$ pour laquelle les deux trajets ont la même longueur.



EXERCICE N°4 (4pts)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} -x + \sqrt{x+1} & si \quad x \geq -1 \\ \dfrac{-|x|^3 + x^2}{x+1} & si \quad x < -1 \end{cases}$

1) Calculer les limites de f en $(-\infty)$ et en $(+\infty)$

2) Etudier la continuité de f en (-1).

3) Etudier la dérivabilité de f en (-1).

4) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et donner sa fonction dérivée.